REVISÃO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÕES APROXIMADAS DE EQUAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

REVIEW ABOUT NUMERICAL METHODS FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF FLUID MECHANICS EQUATIONS

[1]DOS SANTOS, Clezio Abilio; [2]FRAGOSO, Kamira Miksza

[1e2]Departamento de Engenharia Mecânica – Centro Universitário das Faculdades Integradas de Ourinhos-Uni*fio*/FEMM

RESUMO

Na vida real, a solução de problemas que envolvem diversos fenômenos é de difícil solução analítica, isso inclui os fenômenos que envolvem fluidos. Dentre eles, pode-se citar uma usina hidrelétrica, ou até mesmo em nossas casas com o saneamento básico, mas infelizmente diversos fenômenos que incluem líquidos ou gases não possuem solução analítica, sendo necessário buscar por soluções numéricas, que darão um resultado aproximado. O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns métodos numéricos que podem ser utilizados para encontrar soluções aproximadas para equações que envolvem fluidos. Os métodos que serão apresentados são o método de Euler, método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, que são métodos muito utilizados para a solução de problemas envolvendo a mecânica dos fluidos.

Palavras-chaves: Método de Euler; Diferenças Finitos; Elementos Finitos; Fluidos.

ABSTRACT

In real life, solving problems involving various phenomena is difficult to solve analytically, this includes phenomena involving fluids. Among them, we can mention a hydroelectric plant, or even in our homes with basic sanitation, but unfortunately several phenomena that include liquids or gases do not have an analytical solution, making it necessary to search for numerical solutions, which will give an approximate result. The present work aims to present some numerical methods that can be used to find approximate solutions for equations involving fluids. The methods that will be presented are the Euler method, the finite difference method and the finite element method, which are widely used methods for solving problems involving fluid mechanics.

Keywords: Euler method; Finite Differences; Finite Elements; Fluids.

INTRODUÇÃO

Em muitos problemas envolvendo fluidos é interessante realizar uma análise diferencial, que consiste em analisar todos os pontos de uma região de escoamento. Em uma região de volumes infinitesimais, onde no limite, tendendo a quantidade de volumes infinitos, o tamanho do volume tende a um ponto (Çengel, 2015).

Para realizar uma análise diferencial, a fim conseguir encontrar soluções para uma equação, é importante especificar as condições de contorno, em toda a fronteira do domínio de escoamento (Çengel,2015).

Infelizmente muitas equações, como por exemplo as equações de Navier-Stokes ou ainda a equação de Colebrook, não possuem solução analítica, sendo necessário a utilização de métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas, a não ser em situações que possuem campo de escoamento simples (Çengel,2015). Assim, para resolução de equações complexas, utiliza-se a discretização do domínio, dando início a uma análise numérica. A discretização permite o uso computacional para tratamento das equações diferenciais (Franco, 2012).

Na vida real, diferente de idealizações, existem várias variáveis que influenciam no resultado de uma equação. Não é difícil perceber que estamos em um mundo que possui três dimensões, além de uma dimensão temporal, isso significa que, para formular alguma equação, ela possuirá quatro incógnitas, pelo menos, e a sua derivada será uma derivada parcial, dando origem a equações diferenciais parciais.

As equações diferenciais parciais (EDP) são de maior complexidade do que equações diferenciais ordinárias (EDO), pois possuem mais variáveis e raramente possuem solução analítica (Franco, 2012). Isso não significa que todas as equações diferenciais ordinárias possuem solução analítica.

Métodos numéricos são usados para conseguir encontrar soluções aproximadas, e o presente trabalho tem por objetivo realizar uma revisão da literatura disponível sobre alguns destes métodos.

O primeiro é o método de Euler, que é o mais fácil, porém, a solução não possui muita qualidade, entretanto possui a sua importância teórica (Franco, 2012), e pode ser utilizado para resolução de EDOs.

O segundo método é o das diferenças finitas, que consiste em dividir o domínio em pontos discretizados, e substituir as derivadas por aproximações (Franco,2012).

Por último, temos o método dos elementos finitos, que consiste em dividir o domínio em elementos. Ao se entender o comportamento de cada elemento de um conjunto, fica mais fácil entender o elemento completo (Filho, 2009).

O presente trabalho possui a justificativa de ser necessário encontrar soluções para equações diferenciais onde não existe solução analítica, e isso inclui equações de mecânica dos fluidos. Assim sendo, é importante mostrar métodos numéricos para encontrar estas soluções, além de mostrá-las em algumas aplicações direcionadas à mecânica dos fluidos.

Soluções de equações diferenciais são muito úteis para várias aplicações, sendo então interesse nas mais diversas áreas que elas se encontram.

Assim, o presente trabalho tem o objetivo de realizar uma revisão da literatura disponível sobre diferentes métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais, e aplicá-las em mecânica dos fluidos. O levantamento bibliográfico será realizado utilizando ferramentas gratuitas de busca, como o google scholar.

MATERIAL E MÉTODOS

Serão demonstrados alguns métodos numéricos utilizados para resolver equações de mecânica dos fluidos, além de mostrar os resultados em tabelas e simulação em CFD.

Na análise dos fluidos, se encontra grande quantidade de situações que possuem uma análise diferencial pois quando se trata, por exemplo, de escoamento, o fluido se desloca e varia pelas três dimensões espaciais e pelo tempo, podendo assim originar equações diferenciais se tratando de um volume infinitesimal onde as variações são infinitesimais. Outro exemplo é no regime transiente, onde as características do fluido variam com o tempo podendo assim originar equações diferenciais.

Primeiro será utilizado o método de Euler em algumas equações de mecânica dos fluidos, depois o método dos elementos finitos e por fim o método das diferenças finitas.

Para utilizar o método de Euler será necessário saber o valor inicial da variável independente e da variável dependente. Já para conseguir utilizar o método das diferenças finitas e dos elementos finitos, será necessário determinar os valores de contorno, que dependerá de como será feito o experimento (se será com velocidade inicial zero e o valor da velocidade final fixo, por exemplo).

No método dos elementos finitos são encontradas equações que descrevem os graus de liberdade do fluido a ser analisado.

Serão utilizados os métodos em equações de mecânica dos fluidos pois nela existem várias análises diferenciais, e isso inclui análises em regime transiente, onde as características do fluido variam com o tempo.

No presente trabalho serão demonstradas algumas aplicações dos métodos estudados em soluções aplicadas à problemas da mecânica dos fluidos, vindo de trabalhos científicos publicados que serão revisados para esse presente artigo, sendo esse um estudo teórico de revisão bibliográfica.

DESENVOLVIMENTO

Expressões matemáticas que possuem o símbolo de igual denominam-se equações. Equações diferenciais são equações que possuem derivadas em suas funções (Çengel, 2014).

Vários problemas encontrados nas engenharias possuem formulação que envolvem derivadas, originando assim equações diferenciais (Çengel, 2014). Infelizmente, muitas dessas equações diferenciais não possuem solução fácil, sendo necessário a utilização de métodos numéricos.

Um método fácil é o método de Euler, que a seguir será apresentada a sua demonstração:

Considere que as equações 1 e 2 são contínuas e diferenciáveis (Franco, 2012):

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Considere y(x) a solução exata. Utilizando série de Taylor para y($x_n + h$) em torno de x_n, obtemos a equação 3:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + ... + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_n) ++ \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}(\xi_n)$$

$$, x_n < \xi_n < x_n + h. \quad (3)$$

O último termo é o erro de truncamento local.

Truncando a expressão (3), depois de (q + 1) termos, e, considerando que $y' = f(x, y)$, obtemos a equação 4:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) +...+ \frac{h^q}{q!}f^{(q-1)}(x_n, y(x_n)). \quad (4)$$

Substituindo $y(x_n)$ por y_n e $f^j(x_n, y(x_n))$ por $f_n^{\ j}$, obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!}f_n' +...+ \frac{h^q}{q!}f_n^{(q+1)}, \quad (5)$$

Esse é o método de Taylor de ordem q.

Fazendo-se q = 1 em (5), conseguimos a equação 6:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \quad (6)$$

Obtemos por último o método de Euler.

Considerando q = 1 em (3), teremos a fórmula progressiva do método das diferenças finitas, que usa a diferença progressiva e seu erro (Franco, 2012), mostrada na equação 7:

$$y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi)\ ,\ \xi \in (x, x + h) \tag{7}$$

De modo parecido, fazendo -h em (3), mas continuando com q = 1, consegue a fórmula regressiva, que usa a diferença regressiva e seu erro (Franco,2012), conforme mostrado em 8:

$$y'(x) = \frac{y(x)-y(x-h)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi),\ \xi \in (x - h, x) \tag{8}$$

Agora considerando q = 2 em (3), e h e -h, respectivamente, obtemos a seguinte equação:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y''' \tag{9}$$

$$y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) - \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''$$

Calculando $y(x + h) - y(x - h)$, obtém-se a fórmula centrada que utilizada a diferença central e seu erro (Franco,2012), mostrada na equação 10:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3!}y'''(\xi) \tag{10}$$

Essas fórmulas obtidas do método das diferenças finitas podem ser aproximadas para derivadas parciais de funções de várias variáveis. Assim, segundo Franco (2012), e considerando u_t como derivada parcial de u em relação a t, temos as seguintes equações (11-13):

Progressiva:

$$u_t = \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} - \frac{k}{2}u_{tt}(x,\zeta)\ ,\ (t < \zeta < t + k) \tag{11}$$

Regressiva:

$$u_t(x,y) = \frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x,\zeta),\ (t - k < \zeta < t) \tag{12}$$

Central de segunda ordem:

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t)-2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u_{xxx}(\xi,t)$$

$$,\ (x - h < \xi < x + h) \tag{13}$$

Outro método para a solução é o método explicito por diferenças finitas. A seguir está a fórmula, sem demonstração, deste método aplicado para equações parabólicas:

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \sigma(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) \quad (14)$$

onde $\sigma = \frac{k\alpha}{h^2}$

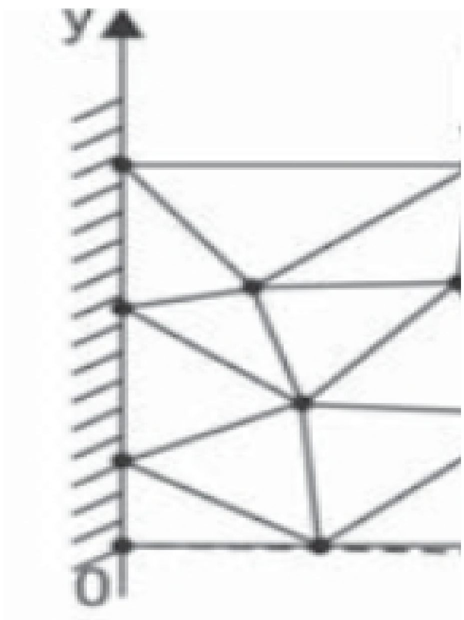
O método dos elementos finitos consiste em subdividir o domínio em regiões simples. A solução do conjunto é obtida juntando as soluções individuais de cada parte (Chapra, 2016).

A relação existente entre as ações e os graus de liberdade são melhor expressos por meio de matriz. Assim (Filho,2009):

$$\{f\} = |k|.\{u\} \quad (15)$$

Podemos, por exemplo, dividir em uma malha com triângulos o domínio de uma chapa bidimensional, como mostrado na figura 1:

Figura 1- domínio em forma de triângulo



Fonte: Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE

Na imagem acima, cada ponto é um nó, que possui graus de liberdade.

Os graus de liberdade que vão na matriz u, em uma situação bidimensional por exemplo, serão funções polinomiais, onde a potência dependerá da quantidade de graus de liberdade.

Os elementos finitos, apresentam solução manual trabalhosa, felizmente podem ser resolvidos com auxílio de programas computacionais.

Independente do problema que estiver trabalhando, sempre será utilizado uma matriz (não necessariamente igual a (15)) que será resolvida iterativamente em um problema computacional.

Outra metodologia que é usado é o método dos resíduos ponderados. Um método simples que pode ser utilizado é o método dos resíduos ponderados, que consiste, de acordo com BRASIL, et al (2015), em uma formulação fraca, que é quando uma igualdade de equação diferencial que era para ser zero em todos os pontos do domínio não precisa ser em todos os pontos, mas sim em uma média ponderada, como na equação abaixo:

$$\int_{0}^{L} (R(x)W(x))\,dx = 0 \qquad (16),$$

onde R(x) é o resíduo e W(x) uma função de ponderação.

O método de Galerkin é basicamente quando a função peso W(x) possui a mesma forma da função da equação que se quer achar a solução. A seguir terá um exemplo do método. (Brasil et al, 2015).

Considere o seguinte problema:

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{q}{EA} = 0\,,\ tal\ que\ u(0) = 0\ e\ u'(L) = \frac{P}{EA}$$

Se for utilizado uma aproximação para a função u, então essa igualdade deixará de ser zero, mas apresentará um resíduo:

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{q}{EA} = R(x)$$

Assim:

$$\int_{0}^{L} (R(x)W(x))\,dx = 0$$

Uma aproximação para u é :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$$

ou, de forma finita:

$$u\,(x) \;=\; \alpha_i \phi_i(x)$$

A função que aproxima u normalmente é polinomial.

Como dito anteriormente, a função peso tem a forma da função que procuramos, assim podemos definir como sendo:

$$w(x) \;=\; \beta_j \phi_j(x)$$

Substituindo:

$$\beta_j \int_0^L \left(\frac{du^2}{dx^2} \;+\; \frac{q}{EA}\right)\phi_j(x)\;dx \;=\; 0$$

Que é satisfeito com:

$$\int_0^L \left(\frac{du^2}{dx^2} \;+\; \frac{q}{EA}\right)\phi_j(x)\;dx \;=\; 0$$

Rearranjando e integrante por partes, integrando e arrumando, obtem-se:

$$EA\frac{d(u(x))}{dx}\phi_j(L) \;-\; \int_0^L EA\frac{d(u(x))}{dx}\frac{d(\phi_j)}{dx}dx \;+\; \int_0^L q\phi_j dx \;=\; 0$$

$$\int_0^L EA\frac{d(u(x))}{dx}\frac{d(\phi_j)}{dx}dx \;=\; \int_0^L q\phi_j dx \;+\; P\phi_j(L)$$

Considerando a função de aproximação para u:

$$\alpha_i \int_0^L EA\frac{d(\phi_i)}{dx}\frac{d(\phi_j)}{dx}dx \;=\; \int_0^L q\phi_j dx \;+\; P\phi_j(L)$$

Agora define-se:

$$K_{ij} = \int_0^L EA\frac{d(\phi_i)}{dx}\frac{d(\phi_j)}{dx}dx$$

$$F_j = \int_0^L q\phi_j dx \;+\; P\phi_j(L)$$

Assim, chega-se na equação:

$$F \;=\; K\alpha$$

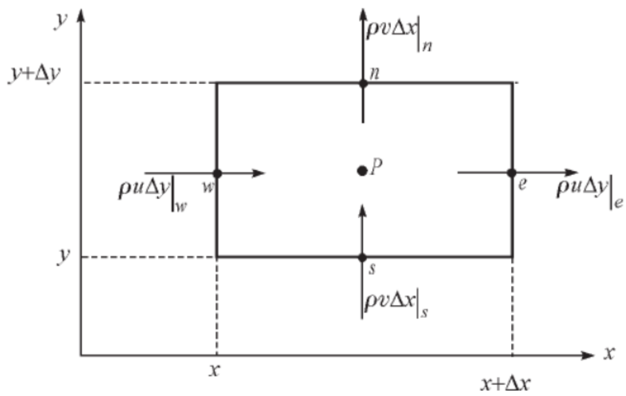
Onde a equação pode ser resolvida e colocada de forma matricial.

O método dos volumes finitos consiste basicamente em dividir o problema em quantidades pequenas e finitas de volume e realizar um balanço ou integração no volume (Maliska, 2004).

Nesse método também se utiliza normalmente diferenças centrais em algumas derivadas presentes (Maliska, 2004).

Como exemplo, considere a figura 2, onde realizaremos um balanço de propriedades (Maliska 2004):

Figura 2 - Volume Elementar



Fonte: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluídos Computacional

$$\frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho u)_n - (\rho u)_s}{\Delta y} = 0$$

Após aplicar limite, obtemos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

E agora integrando o volume e considerando que o fluxo de massa é a média da variação, obtemos:

$$\rho u \Delta Y_e - \rho u \Delta Y_w + \rho u \Delta X_n - \rho u \Delta X_s = 0$$

ou

$$\frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_w}{dt} + \frac{dm_n}{dt} - \frac{dm_s}{dt} = 0$$

CONCLUSÕES

Até o presente momento do desenvolvimento desta pesquisa, foram demonstradas diversas formas de solução que podem ser aplicadas à várias equações e problemas dentro da engenharia mecânica, especialmente na área de mecânica dos fluidos. Os próximos passos do presente trabalho são as aplicações destas soluções em problemas reais de engenharia, com a demonstração de algumas destas soluções.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Reyolando M. L. R F.; BALTHAZAR, José M.; GÓIS, Wesley. **Métodos numéricos e computacionais na prática de Engenharias e Ciências.** [Digite o Local da Editora]: Editora Blucher, 2015. E-book. ISBN 9788521209362. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521209362/. Acesso em: 25 abr. 2023.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. [PORTO ALEGRE - RS]: Grupo A, 2016. E-book. ISBN 9788580555691. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580555691/. Acesso em: 20 fev. 2023.

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos**. [PORTO ALEGRE - RS]: Grupo A, 2015. E-book. ISBN 9788580554915. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580554915/. Acesso em: 15 fev. 2023.

ÇENGEL, Yunus A.; **III**, William J P. **Equações Diferenciais.** [PORTO ALEGRE - RS]: Grupo A, 2014. E-book. ISBN 9788580553499. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580553499/. Acesso em: 15 fev. 2023.

FILHO, Avelino A**. Elementos Finitos:** A Base da Tecnologia CAE. [*São José dos Campos, SP*]: Editora Saraiva, 2009. E-book. ISBN 9788536519708. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536519708/. Acesso em: 15 fev. 2023.

MALISKA, Clovis R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluídos Computacional**, 2ª edição. [Digite o Local da Editora]: Grupo GEN, 2004. E-book. ISBN 9788521633365. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521633365/. Acesso em: 25 abr. 2023.

NEIDE, Bertoldi F. **Cálculo Numérico**. 1. ed. Local: Pearson, 2015.